

MMG600 Reell analys

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559

Telefonvakt: Juan Inda, 772 5325

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 20 poäng krävs för betyget VG.

Lösningförslag hängs på anslagstavlan i korridoren utanför MVF 23.

Resultat meddelas via Ladok, granskning sker på studieexpeditionen.

1. Låt (M, d) vara ett metriskt rum.
 - (a) Definiera begreppen *öppen*, *sluten* respektive *kompakt mängd* i M .
 - (b) Visa att varje kompakt mängd är sluten och begränsad (i M).
 - (c) Ge exempel på ett metriskt rum där omvändningen till ovanstående sats inte gäller. Motivera varför omvändningen inte gäller. (6p)
2. (a) Definiera begreppen *separerade mängder* respektive *sammanhängande mängd* i ett metriskt rum.
 - (b) Visa att $\{(x, x \sin^2(1/x)); x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ är en sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$. (3p)
3. För ett givet metriskt rum X , betecknar $\mathcal{C}(X)$ det metriska rum som består av mängden av alla kontinuerliga och begränsade reellvärda funktioner på X , försedd med supnormen. Visa att $\mathcal{C}(X)$ är fullständigt. (3p)
4. Avgör om funktionsföljden $f_n(x) = x + \frac{x}{n} \ln x$ konvergerar likformigt på $]0, 1]$. (3p)
5. Låt $f(x, y) = (\cos xy, y^2 + \sin x)$. Visa att f är lokalt inverterbar vid punkten $(\pi/2, 1)$ men inte vid $(0, 0)$. Låt g beteckna den lokala inversen till f vid $(\pi/2, 1)$ och bestäm den linjära approximationen av g vid $f(\pi/2, 1)$. (3p)
6. (a) Definiera begreppet *likformig kontinuitet*.
 - (b) Låt $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad av

$$Tf = \min_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Visa att T är likformigt kontinuerlig på $\mathcal{C}([0, 1])$. (4p)

7. Visa att en familj av öppna disjunkta mängder i $\mathbb{R}$ är högst uppräknelig. Ge exempel på en familj av slutna disjunkta mängder i $\mathbb{R}$ som är överuppräknelig. (3p)

Lycka till!

Ulla