

MMG600 Reell analys

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559

Telefonvakt: Ulla Dinger, 772 3559

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 20 poäng krävs för betyget VG.

Lösningförslag hängs på anslagstavlan i korridoren utanför MVF 23.

Resultat meddelas via Ladok, granskning sker på studieexpeditionen.

1. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$.

(a) Definiera begreppen *inre punkt* och *öppen mängd*.

(b) Definiera begreppen *hopningspunkt till E* och *slutna höljet, $\overline{E}$, till E* .

(c) Låt U vara en öppen mängd i M . Visa att det till varje punkt p i U finns en öppen mängd V sådan att $p \in V$ och $\overline{V} \subseteq U$. (4p)

2. (a) Definiera begreppet *kompakt mängd*.

(b) Låt X vara ett kompakt metriskt rum och (p_n) en följd i X . Visa att (p_n) har en delföljd som konvergerar i X . (3p)

3. Formulera och bevisa Urysohns lemma.

Ge definitionen av avståndsfunktionen och formulera (utan bevis) satsen om egenskaper hos avståndsfunktionen, som används i beviset av Urysohn. (4p)

4. (a) Definiera begreppet *likformig konvergens*.

(b) Visa att funktionsföljden

$$f_n(x) = x^{\sqrt[n]{x}}$$

konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd av $]0, \infty[$, men inte på $]0, \infty[$. (4p)

5. Låt f vara en reellvärd kontinuerlig funktion på ett metriskt rum M .

Sätt $S = \{x \in M ; f(x) \geq 0\}$. Visa eller vederlägg följande påståenden.

(a) Om M är kompakt så är S kompakt.

(b) Om M är sammanhängande så är S sammanhängande (i M). (4p)

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x \ln y + uvz &= y + 5 \\ x^2v + vy &= z + 1 \end{cases}$$

definierar (u, v) som en funktion g av (x, y, z) i en omgivning av punkten $(u, v, x, y, z) = (1, 3, 0, 1, 2)$. Bestäm den linjära approximationen av g vid $(0, 1, 2)$. (3p)

7. Visa att det för varje $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ finns en entydigt bestämd funktion $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ sådan att

$$f(x) = g(x) + \int_0^x tf(t)dt$$

för alla $x \in [0, 1]$. (3p)

Lycka till!
Ulla