

MMG600 Reell analys

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559

Telefonvakt: Andreas Petersson, 772 5325

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 20 poäng krävs för betyget VG.

Lösningförslag hängs på anslagstavlan i korridoren utanför MVF 23.

Resultat meddelas via Ladok, granskning sker på studieexpeditionen.

1. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$.

- (a) Definiera begreppen *öppen boll (omgivning)* och *öppen mängd* i M .
- (b) Definiera begreppen *inre punkt* i och *hopningspunkt till* E .
- (c) Låt $M = \mathcal{C}([0, 1])$, mängden av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ försedd med supremumnormen, och låt

$$E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(x) < 0 \text{ för alla } x \in [0, 1]\}.$$

Visa att E är öppen. (4p)

2. Låt f vara en funktion från ett metriskt rum X in i ett metriskt rum Y .

- (a) Definiera vad som menas med att f är *likformigt kontinuerlig* på X .
- (b) Visa att, om f är kontinuerlig på X och X är kompakt så är f likformigt kontinuerlig på X . (4p)

3. Formulera och bevisa satsen om Cauchy villkoret för likformig konvergens. (4p)

4. (a) Visa att mängden $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 < x_4 < x_1 x_2 x_3\}$ är öppen i $\mathbb{R}^4$. (2p)

(b) Avgör om mängden $\{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 2\}$ är kompakt i $\mathbb{Q}$, då $\mathbb{Q}$ betraktas som ett metriskt delrum till $\mathbb{R}$. (2p)

5. Avgör om funktionsföljden

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}$$

konvergerar likformigt på intervallet $[0, 1]$. (3p)

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} y \ln z + uv - 4 &= xz \\ y^2 v + ux + 4 &= vz \end{cases}$$

definierar (u, v) som en funktion g av (x, y, z) i en omgivning av punkten $(u, v, x, y, z) = (2, 3, 1, 0, 2)$. Bestäm den linjära approximationen av g vid $(1, 0, 2)$. (3p)

7. Visa att det finns exakt en funktion $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ sådan att

$$f(x) = \frac{1}{3} \int_0^1 (x+y)^2 f(y) dy \text{ för alla } x \in [0, 1]. \quad (3p)$$

Lycka till!

Ulla